第３講　複素数と漸化式，三項間漸化式と極限，面積で評価

7　複素数 a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次のように定める．

$$a_1=1+i,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n-3}$$

ただし，i は虚数単位である．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　複素数平面上の 3 点 0，a_1，a_2 を通る円の方程式を求めよ．

(2)　すべての a_n は(1)で求めた円上にあることを示せ．

《05 北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

8 xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 C_1，C_2，C_3，…を次のように定める．

- C_1 と C_2 は半径１の円で，互いに外接する．
- 正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し，C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある．

円 C_n の半径を r_n とする．

(1) 等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ．

(2) すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}=s\alpha^n+t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 α，β，s，t の値を１組与えよ．

(3) $n\to\infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ．

《14 名大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ.

《14 阪大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　複素数と漸化式，三項間漸化式と極限，面積で評価

7 複素数 a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次のように定める．

$$a_1=1+i,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n-3}$$

ただし，i は虚数単位である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 複素数平面上の３点 0，a_1，a_2 を通る円の方程式を求めよ．

(2) すべての a_n は(1)で求めた円上にあることを示せ．

《05 北大・理系》

【答】 (1) $|z-1|=1$　　(2) 略

【解説】 (1) $a_2=\dfrac{a_1}{2a_1-3}=\dfrac{1+i}{2(1+i)-3}=\dfrac{1-3i}{5}$ である．

求める円の中心を α，半径を $r\ (>0)$ とすると円の方程式は

$|z-\alpha|=r \iff z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}-r^2=0$ と表され，この円は点 0 を通ることにより

$\alpha\overline{\alpha}-r^2=0$ を得るが，更に a_1，a_2 を通ることより

$$\begin{cases}(1+i)(1-i)-(1+i)\overline{\alpha}-(1-i)\alpha=0\\ \dfrac{1-3i}{5}\cdot\dfrac{1+3i}{5}-\dfrac{1-3i}{5}\overline{\alpha}-\dfrac{1+3i}{5}\alpha=0\end{cases}$$

つまり $\begin{cases}2-(1+i)\overline{\alpha}-(1-i)\alpha=0 & \cdots① \\ \dfrac{2}{5}-\dfrac{1-3i}{5}\overline{\alpha}-\dfrac{1+3i}{5}\alpha=0 & \cdots②\end{cases}$ を得る．

①－②×5 より $4i(\alpha-\overline{\alpha})=0$．ゆえに $\alpha=\overline{\alpha}$ より α は実数．これと①より $\alpha=1$．

また $\alpha\overline{\alpha}-r^2=0$ より $r=1$．ゆえに求める円の方程式は $\boldsymbol{|z-1|=1}$．

(2) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n-3}$ と $a_1=1+i\neq0$ より帰納的に $a_n\neq0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$．

よって

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n-3} \iff \frac{1}{a_{n+1}}=2-\frac{3}{a_n}$$
$$\iff \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{2}=-3\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2}\right)$$

と変形できるので，$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{2}\right)(-3)^{n-1}$ つまり $a_n=\dfrac{2}{1-(-3)^{n-1}i}$ を得る．

このとき

$$|a_n-1|=\left|\frac{2}{1-(-3)^{n-1}i}-1\right|=\left|\frac{1+(-3)^{n-1}i}{1-(-3)^{n-1}i}\right|=\frac{\left|1+(-3)^{n-1}i\right|}{\left|1-(-3)^{n-1}i\right|}=\frac{\sqrt{1+9^{n-1}}}{\sqrt{1+9^{n-1}}}=1 \text{ より}$$

a_n は $|z-1|=1$ 上にあることが示された．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

8　xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 C_1，C_2，C_3，…を次のように定める．

- C_1 と C_2 は半径１の円で，互いに外接する．
- 正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し，C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある．

円 C_n の半径を r_n とする．

(1)　等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ．

(2)　すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}=s\alpha^n+t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 α，β，s，t の値を１組与えよ．

(3)　$n\to\infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ．

《14 名大・理系》

【答】 (1)　略　　(2)　$(\alpha,\ \beta,\ s,\ t)=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

(3)　$k=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，極限値は５

【解説】 (1)　C_n の中心を P_n，C_n と x 軸との接点を H_n とおいて，H_n，H_{n+1}，P_{n+1}，P_n で作られる台形を考えると，三平方の定理より

$$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}{}^2=|\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n-\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}|^2+\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}{}^2 \iff (r_n+r_{n+1})^2=(r_n-r_{n+1})^2+\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}{}^2$$
$$\iff \mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}=2\sqrt{r_nr_{n+1}}$$

となる．同様に $\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}=2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}}$，$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+2}=2\sqrt{r_nr_{n+2}}$ であることと $\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}=\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+2}+\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}$ より $2\sqrt{r_nr_{n+1}}=2\sqrt{r_nr_{n+2}}+2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}}$ なので，

$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を得る．

(2)　$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}=\frac{1}{\sqrt{r_n}}+\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} \iff \frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}-\alpha\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}=\beta\left(\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}-\alpha\frac{1}{\sqrt{r_n}}\right)$$

と変形できるので $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}-\dfrac{\alpha}{\sqrt{r_n}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}-\dfrac{\alpha}{\sqrt{r_1}}\right)\beta^{n-1}$ となるが，$r_1=r_2=1$ より

$\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}-\dfrac{\alpha}{\sqrt{r_1}}=1-\alpha=\beta$ なので $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}-\dfrac{\alpha}{\sqrt{r_n}}=\beta^n$　…①を得る．また

$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}-\beta\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}=\alpha\left(\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}-\beta\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}\right)$ と変形することにより，同様に

$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}-\dfrac{\beta}{\sqrt{r_n}}=\alpha^n$　…②となるので①－②より

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{r_n}}=\beta^n-\alpha^n \text{ つまり } \frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-\alpha^n+\beta^n)$$

となるので$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta,\ s,\ t)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ -\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$.

(3)　$\alpha\beta=-1$ であることと，(2)の結果より

$$r_n=\frac{1}{\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-\alpha^n+\beta^n)\right\}^2}=\frac{1}{\beta^{2n}}\cdot\frac{5}{\{1-(-\alpha^2)^n\}^2}=\alpha^{2n}\cdot\frac{5}{\{1-(-\alpha^2)^n\}^2}$$

となるので

$$\frac{r_n}{k^n}=\left(\frac{\alpha^2}{k}\right)^n\cdot\frac{5}{\{1-(-\alpha^2)^n\}^2}$$

となる．

　このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\{1-(-\alpha^2)^n\}^2}=5$ より，

$n\to\infty$ のとき $\left\{\frac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束する条件は $\frac{\alpha^2}{k}=1$ つまり $k=\alpha^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

以上より $\boldsymbol{k=\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$，**極限値は 5**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

9　$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ．

《14 阪大・理系》

【答】　398

【解説】　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ とおくと $f'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}<0$ より自然数 n に対して，

$n<x<n+1$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

が成り立つので

$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}dx>\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx>\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,dx$ つまり $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}>\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

が成り立つ．

$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\frac{1}{\sqrt{n}}$ において $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 39999$ を代入したものの和をとることで

$$\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\sum_{n=1}^{39999}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

この両辺に $\dfrac{1}{\sqrt{40000}}$ を加えることにより

$$\frac{1}{\sqrt{40000}}+\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

また $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ において $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 39999$ を代入したものの和をとることで

$$\sum_{n=2}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}<\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

この両辺に 1 を加えて

$$\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}<1+\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

ここで $\displaystyle\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{40000}=2(\sqrt{40000}-1)=398$，$\dfrac{1}{\sqrt{40000}}=\dfrac{1}{200}$ より

$$398+\frac{1}{200}<\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}<399$$

となるので，$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分は **398**.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。